Concours externe
pour le recrutement de contrôleurs des douanes et droits indirects

Branche de la surveillance

-

Corrigé 2012

Exercice 1

Partie A

1. La fonction logarithme est définie sur $]0;+\infty[$ donc $D =]-1;+\infty[$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
2. $\forall x \in D$, $f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$
   $f''(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x+2}{(x+1)^2} > 0$ donc $f''(x)$ est strictement positive sur D . Ainsi $f'(x)$ est strictement croissante sur D . Puisque f' est continue, cela signifie qu'elle s'annule au maximum une fois. Or puisque $f'(0) = \ln(1) = 0$, on sait que l'unique zéro de f' est 0 . Pour conclure, on a $f'(x) < 0$ pour $x \in]-1;0[$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in]0;+\infty[$
3. Sur $]0;+\infty[$, $\ln(x+1) > 0$ et $\dfrac{x}{x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est strictement positive sur $]0;+\infty[$, d'où f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
4. Le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$ est le suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. Puisque la dérivée de f s'annule en $x = 0$, la tangente de f en ce point est horizontale.

Partie B

1. $ax+b+\dfrac{c}{x+1}=\dfrac{ax(x+1)+b(x+1)+c}{x+1}=\dfrac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$
   Par identification, on obtient le système
   $$\begin{cases} a &= 1 \\ a+b &= 0 \\ b+c &= 0 \end{cases}$$
   En conclusion,
   $$\boxed{a=1,\ b=-1,\ c=1}$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1 \frac{x^2-1+1}{x+1}dx=\int_0^1 \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}dx=\int_0^1 (x-1)dx+\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$
   Le calcul de la primitive de $x-1$ donne : $\displaystyle\int_0^1 (x-1)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1=-\frac{1}{2}$
   Le calcul de la primitive de $\dfrac{1}{x+1}$ donne : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx=[\ln(x+1)]_0^1=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$
   En conclusion,
   $$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx=\ln(2)-\frac{1}{2}}$$

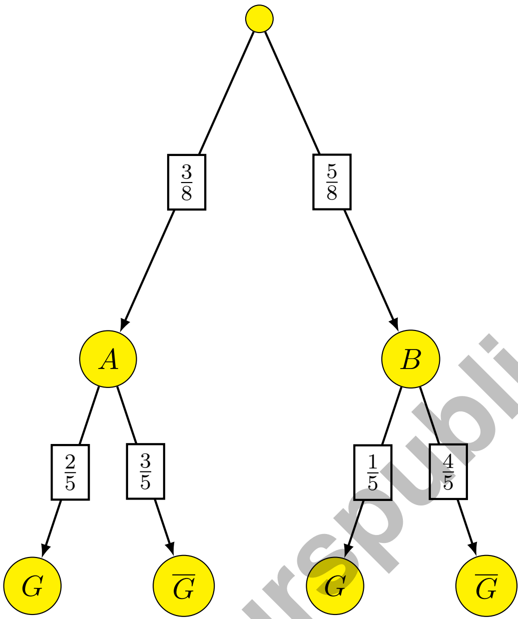
3. L'aire délimitée par la fonction f pour x entre 0 et 1 vaut $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\ln(x+1)dx$
   $$\int_0^1 x\ln(x+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1 \frac{1}{x+1}\frac{x^2}{2}dx=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}(\ln(2)-\frac{1}{2})$$
   En conclusion,
   $$\boxed{\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}}$$

Partie C

1. On considère la fonction g définie sur D par $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{4}$
   g est continue et strictement croissante sur $]0;1[$ car le signe de g' est le même que celui de f' sur D
   Or $g(0)=f(0)-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}<0$ et $g(1)=ln(2)-\dfrac{1}{4}=0,69-0,25=0,44>0$
   Ainsi $0\in[g(0);(g(1)]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ a une unique solution sur $[0;1]$, ce qui est équivalent à dire que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{4}$ a une unique solution sur $[0;1]$

Exercice 2

1. La situation est modélisée par l'arbre de probabilités suivant :



$P(A) = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8}$ et $P(B) = 1 - P(A) = \dfrac{5}{8}$

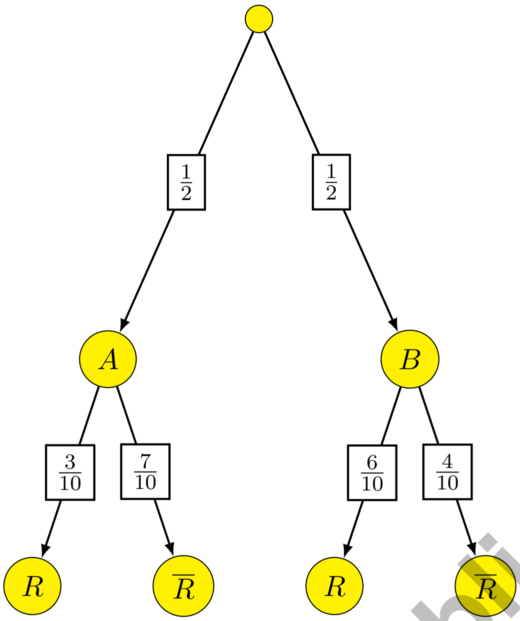
2. (a) $P_A(G) = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$. On en déduit $P(A \cap G) = P(A)P_A(G) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{20}$

   (b) L'évènement "le joueur n'a pas tiré de figure et gagne un lot" est l'évènement $B \cap G$
   Or $P_B(G) = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$, donc $P(B \cap G) = P(B)P_B(G) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{8}$

3. D'après la formule des probabilités totales, $P(G) = P_A(G)P(A) + P_B(G)P(B) = \dfrac{3}{20} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{160}$

Exercice 3

1. La situation est modélisée par l'arbre de probabilité suivant :



$P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$, $P_A(R) = \dfrac{3}{10}$, $P_B(R) = \dfrac{6}{10}$,

$P(A \cap R) = P_A(R)P(A) = \dfrac{3}{20}$ et $P(B \cap R) = P_B(R)P(B) = \dfrac{3}{10}$

2. Les évènement A et B forment une partition de l'univers Ω donc d'après la formule des probabilités totales, $P(R) = P_A(R)P(A) + P_B(R)P(B) = \dfrac{3}{20} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{9}{200}$

3. $P_R(A) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(R)} = \dfrac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{200}} = \dfrac{10}{3}$ et $P_R(B) = \dfrac{P(B \cap R)}{P(R)} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{200}} = \dfrac{20}{3}$

4. (a) X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{2, -6, 0, 4\}$

   $P(X = 2) = P(A \cap R) = \dfrac{3}{20}$

   $P(X = -6) = P(A \cap \overline{R}) = P_A(\overline{R})P(A) = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{20}$

   $P(X = 0) = P(B \cap R) = \dfrac{3}{10}$

   $P(X = 4) = P(B \cap \overline{R}) = P_B(\overline{R})P(B) = \dfrac{4}{10} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{5}$

   (b) $\mathbb{E}[X] = 2P(X = 2) - 6P(X = -6) + 0P(X = 0) + 4P(X = 4) = \dfrac{3}{10} - \dfrac{21}{10} + \dfrac{4}{5} = -1$

   L'espérance de gain est négative donc il est préférable de ne pas jouer.

Exercice 4

Résolution dans $\mathbb{R}$:

L'équation est équivalente à $(x^2+\frac{4}{x^2})+(x-\frac{2}{x})-6=0$
On pose le changement de variable $z=x-\frac{2}{x}$
On remarque que $z^2=x^2-4+\frac{4}{x^2}=(x^2+\frac{4}{x^2})-4$ donc l'équation devient $z^2+z-2=0$
$\Delta=1^2-4(-2)=9$
Les solutions de l'équation sont donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1 & = & \frac{-1+\sqrt{\Delta}}{2}=1 \\ z_2 & = & \frac{-1-\sqrt{\Delta}}{2}=-2 \end{array}\right.$$

— On résout d'abord l'équation $z_1=x-\frac{2}{x} \leftrightarrow x^2-x-2=0$
  $\Delta=1-4(-2)=9$ Donc les solutions sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}=2 \\ x_2 & = & \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}=-1 \end{array}\right.$$

— On résout ensuite l'équation $z_2=x-\frac{2}{x} \leftrightarrow x^2+2x-2=0$
  $\Delta=2^2-4(-2)=12$ Donc les solutions sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_3 & = & \frac{-2+\sqrt{\Delta}}{2}=-1+\sqrt{3} \\ x_4 & = & \frac{-2-\sqrt{\Delta}}{2}=-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

En conclusion, les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2+x-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=6$ sont :

$$\boxed{x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=-1+\sqrt{3} \text{ et } x_4=-1-\sqrt{3}}$$

Résolution dans $\mathbb{C}$:
Les solutions dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ car à aucun moment le discriminant est négatif.