Concours externe
pour le recrutement de contrôleurs des douanes et droits indirects

Branche du contrôle des opérations commerciales et d'administration générale

-

Corrigé année 2012

Exercice 1

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \left(\frac{1}{2}u_n - 3\right) + 6 = \frac{1}{2}(v_n - 6) - 3 = \frac{1}{2}v_n$
D'où :

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \tfrac{1}{2}}$$

(b) On utilise la formule de la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{v_0}_{9+6=15} = \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \cdot 15 = 30 - 15\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = 30 - \frac{15}{2^n}}$$

On obtient également en suivant l'indication :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S'_n = S_n - 6 \cdot (n+1) = 24 - \frac{15}{2^n} - 6n}$$

Enfin on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{15}{2^n} = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 30}$. De même : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n = -\infty}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \ln v_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{2}v_n\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln v_n = w_n - \ln 2$ D'où :

$$\boxed{(w_n) \text{ est arithmétique de raison } -\ln 2}$$

On note que $w_0 = \ln v_0 = \ln 15$

(d) On utilise la formule de la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite arithmétique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S''_n = (n+1)\frac{w_0 + \overbrace{w_n}^{w_0+n\cdot(-\ln 2)}}{2} = (n+1)\frac{2\cdot\ln 15 + n\cdot(-\ln 2)}{2} = (n+1)\left(\ln 15 - \frac{n\ln 2}{2}\right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S''_n = (n+1)\left(\ln 15 - \frac{n\ln 2}{2}\right)}$$

Enfin on a $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty}\left(\ln 15 - \frac{n\ln 2}{2}\right) = -\infty \end{cases}$, donc par produit non indéterminé on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S''_n = -\infty}$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad \ln P_n = \ln(v_0 \cdot v_1 \cdot \ldots \cdot v_n) = \ln v_0 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n = S''_n$

D'où $P_n = \exp\left((n+1)\left(\ln 15 - \frac{n\ln 2}{2}\right)\right) = \exp\left(\ln 15 - \frac{n\ln 2}{2}\right)^{n+1}$ puis on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \left(\frac{15}{2^{n/2}}\right)^{n+1} = \left(\frac{15}{\sqrt{2}^n}\right)^{n+1}}$$

Exercice 2

Partie A

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme produit de fonctions dérivables. On a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = -xe^{-x+2} + e^{-x+2} = (1-x)e^{-x+2}}$$

$f'(x)$ est alors du signe de $x \longmapsto 1-x$
On a par croissance comparé de l'exponentielle face au puissances polynomiales : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Donc f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.
D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

2. (a) Allure de la courbe (C) en vert et (L) en rouge.

On en déduit que cette équation admet $\boxed{\text{une unique solution}}$ sur $[1,+\infty[$.

(b) g est dérivable comme différence de fonctions dérivables puis :

$$\boxed{\forall x \in [1,+\infty], g'(x) = \frac{1}{x} - \underbrace{(1-x)e^{-x+2}}_{\leq 0} > 0}$$

Donc g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
On a : $g(1) = 0 - e < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) + 0 = +\infty$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires , g s'annule sur $[1,+\infty[$ et la croissance stricte assure l'unicité de la solution $g(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Donc l'équation } f(x) = \ln(x) \text{ admet une unique solution sur } [1,+\infty[}$$

3. On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 4-e^x = -\infty \end{cases}$ d'où par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 4-e^x = 4 \end{cases}$ d'où par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

4. (a) h est dérivable comme produit et on a :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, h'(x) = e^x(4-e^x) + e^x(-e^x) = 2e^x(2-e^x)}$$

(b) Par croissance du logarithme on a

$$2-e^x > 0 \Leftrightarrow x < \ln 2$$

$h'(x)$ est du signe de $2-e^x$ par positivité de exp. Donc h est strictement croissante sur $]-\infty,\ln 2]$ et strictement décroissante sur $[\ln 2,+\infty[$.

5. On a $h(\ln 2) = 2(4-2) = 4$. Les questions précédentes nous permettent d'obtenir :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

6. (a) $\boxed{h(0) = 1(4-1) = 3}$

(b) On a $\begin{cases} h(x)-3 = e^x(4-e^x)-3 = 4e^x - e^{2x} - 3 \\ (e^x-3)(1-e^x) = e^x - 3 - e^{2x} + 3e^x = 4e^x - e^{2x} - 3 \end{cases}$

On a bien la relation demandée.

$$h(x) = 3 \Leftrightarrow h(x)-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - 3 = 0 \\ \text{ou} \\ 1-e^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 3 \\ \text{ou} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Donc } \lambda = 3}$$

Partie B

Exercice 3

1. Retraduisons l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T) &= 0.75 \\
\mathbb{P}(\overline{T}) &= 0.25 \\
\mathbb{P}(R \mid T) &= 0.8 \\
\mathbb{P}(\overline{R} \mid T) &= 0.2 \\
\mathbb{P}(\overline{R} \mid \overline{T}) &= 0.7 \\
\mathbb{P}(R \mid \overline{T}) &= 0.3
\end{aligned}$$

On cherche $\mathbb{P}(T \cap R)$. On utilise la formule des probabilités conditionnelles pour faire apparaître les données de l'énoncé.

$\mathbb{P}(T \cap R) = \mathbb{P}(R \mid T) \cdot \overbrace{\mathbb{P}(T)}^{\neq 0} = 0.8 \times 0.75 = 0.6$

(a) $\boxed{\mathbb{P}(T \cap R) = 0.6}$

(b) La formule des probabilités totales s'écrit ici :

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \cap T) + \mathbb{P}(R \cap \overline{T})$$

On calcule comme ci-dessus : $\mathbb{P}(R \cap \overline{T}) = \mathbb{P}(R \mid \overline{T}) \cdot \mathbb{P}(\overline{T}) = 0.3 \cdot 0.25 = 0.075$
D'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(R) = 0.6 + 0.075 = 0.675}$$

2. On cherche $\mathbb{P}(T \mid \overline{R})$. La formule des probabilités conditionnelles donne (les évènements sont tous de probabilité non nulle) :

$$\mathbb{P}(T \mid \overline{R})\mathbb{P}(\overline{R}) = \mathbb{P}(T \cap \overline{R}) = \mathbb{P}(\overline{R} \mid T)\mathbb{P}(T)$$

Donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(T \mid \overline{R}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{R} \mid T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(\overline{R})} = \frac{0.2 \cdot 0.75}{1 - 0.675} = 0.462}$$

3. Notons :
   — R_1 la personne 1 a réussi le concours
   — R_2 la personne 2 a réussi le concours
   — R_3 la personne 3 a réussi le concours

   On cherche $p = \mathbb{P}(\overline{R_1} \cup \overline{R_2} \cup \overline{R_3})$. Alors :

$$\mathbb{P}(\overline{R_1} \cup \overline{R_2} \cup \overline{R_3}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\overline{R_1} \cup \overline{R_2} \cup \overline{R_3}}) = 1 - \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$$

   Par indépendance mutuelle de R_1, R_2 et R_3 on a : $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2)\mathbb{P}(R_3) = \mathbb{P}(R)^3$
   Donc :

$$\boxed{p = 1 - 0.675^3 = 0.692}$$

Exercice 4

0. Effectuons un travail préliminaire pour pouvoir répondre ensuite immédiatement à chacune des questions :

   Pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ on note X_i la variable aléatoire qui vaut

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si la guitare i est toujours accordée 6 mois après la vente} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   On pose également le nombre de guitares encore accordées : $X = X_1 + ... + X_5$

   Pour chaque i on a $X_i \sim \mathcal{B}_{0.8}$ (loi de Bernoulli de paramètre 0.8)
   Les X_i étant identiques et indépendantes, $X \sim \mathcal{B}(5, 0.8)$ (loi binomiale).

1. $\mathbb{P}(X = 5) = 0.8^5 = 0.328$

2. $\mathbb{P}(X = 0) = (1 - 0.8)^5 = 0.00032$

3. $\mathbb{P}(X = 2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} 0.8^2(1 - 0.8)^3 = 10 \cdot 0.64 \cdot 0.008 = 0.051$

4.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 3) &= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} 0.8^3(1 - 0.8)^2 + 5 \cdot 0.8^4(1 - 0.8) + 0.8^5 \\ &= 0.94 \end{aligned}$$