Concours externe
pour le recrutement de contrôleurs des douanes et droits indirects

Branche de la surveillance

-

Corrigé 2013

Exercice 1

1. $U_0 = -1,00$;$U_1 = 0,67$; $U_2 = 1,50$; $U_3 = 2,00$; $U_4 = 2,33$; $U_5 = 2,57$; $U_6 = 2,75$; $U_7 = 2,89$; $U_8 = 3,00$; $U_9 = 3,09$; $U_{10} = 3,17$; $U_{100} = 3,90$

2. Montrons que $-1 \leq U_n \leq 4$:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{4n-2}{n+2} \\ &= \frac{4(n+2)-10}{n+2} \\ &= 4 - \frac{10}{n+2} \end{aligned}$$

   Or $0 \leq \dfrac{10}{n+2} \leq 5$ d'où l'encadrement recherché.

   On dit que U_n est minorée par -1 et majorée par 4.

3. $U_{n+1} - U_n = \dfrac{4n+2}{n+3} - \dfrac{4n-2}{n+2} = \dfrac{(4n+2)(n+2)-(4n-2)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{10}{(n+3)(n+2)} \geq 0$ Donc la suite (U_n) est croissante.

4. $U_n = 3,999 \leftrightarrow 4n-2 = (n+2)3,999 \leftrightarrow n = 9998$ donc pour n=9999 on a $U_n > 3,999$ car (U_n) est croissante.

5. On pourra toujours trouver un n assez grand pour se rapprocher de 4 qui est le majorant de (U_n) donc 4 est la borne supérieure de (Un) . Or $(U_n$) est croissante et majorée donc tend vers sa borne supérieure. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = 4$

Exercice 2

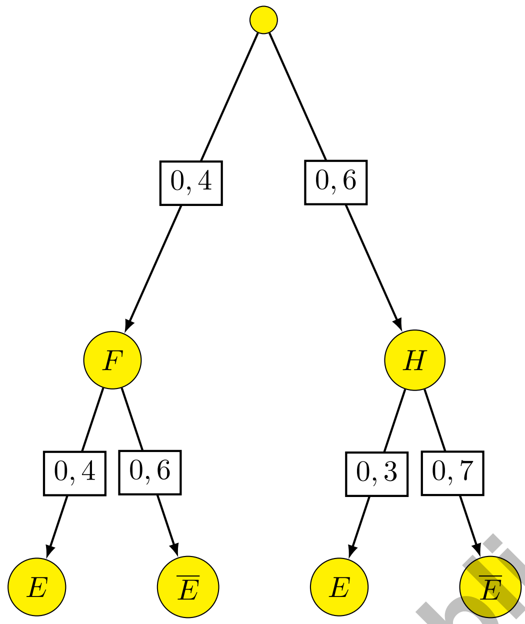
1. C_f passe par le point $A(0;7)$, ce qui donne l'équation : $7 = b + 3\ln(1) \leftrightarrow b = 7$
   De plus on sait que la tangente à C_f en A est horizontale donc $f'(0) = 0$. Or $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = a + \dfrac{3}{x+1}$ donc $f'(0) = 0 \leftrightarrow a = -3$
   En conclusion,
   $$\boxed{a = -3 \ et \ b = 7}$$
2. Puisque C_f admet une tangente horizontale en $A(0;7)$, cela signifie que la dérivée s'annule en ce point. Par ailleurs on sait que la fonction est monotone de part et d'autre de ce point donc il suffit de calculer des ordonnées bien choisies pour savoir s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.
   $f(-1) = 6,42 \leq f(0)$ donc nécessairement C_f est croissante sur] -1 ;0[et décroissante sur $]0;+\infty[$
3. (a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$
   La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe C_f
   (b) $f(x) = x(-3 + \dfrac{7}{x} + \dfrac{3\ln(x+1)}{x})$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
4. $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = -3 + \dfrac{3}{x+1}$
   $f'(x) = 0 \leftrightarrow \dfrac{3}{x+1} = 3 \leftrightarrow x = 0$ donc on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

5. $\forall x \in]-1;+\infty[$, $g'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x+1}{x+1} - 1 = \ln(x+1)$.
   Ainsi g est la primitive de $\ln(x+1)$ donc on en déduit que la fonction $\dfrac{-3x^2}{2} + 7x + 3g(x)$ définie sur $]-1;+\infty[$ est la primitive de f .

Exercice 3

1. On note F l'évènement "l'individu est une femme". On note H l'évènement "l'individu est un homme". On note E l'évènement "l'individu parle une langue étrangère".
   La situation est modélisée par l'arbre suivant :



La probabilité qu'une personne interrogée soit une femme parlant une langue étrangère est $P(F \cap E) = P(E|F)P(F) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$

2. La probabilité que cette personne soit une femme ne parlant aucune langue étrangère est $P(F \cap \overline{E}) = P(\overline{E}|F)P(F) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$

3. $P(F|\overline{E}) = \dfrac{P(F \cap \overline{E})}{P(\overline{E})}$. Or d'après la formule des probabilités totales,

   $P(\overline{E}) = P(\overline{E}|H)P(H) + P(\overline{E}|F)P(F) = 0,3 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 = 0,42$

   Ainsi $P(F|\overline{E}) = \dfrac{0,24}{0,42} = 0,57$