Concours externe
pour le recrutement de contrôleurs des douanes et droits indirects
Branche du contrôle des opérations commerciales et d'administration générale
-
Corrigé année 2013

Exercice 1

Partie A

1. g est dérivable sur $I = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ comme somme de fonctions dérivables. On a :

$$\boxed{\forall x \in I, g'(x) = \frac{2}{e} - \frac{1}{x} = \frac{1}{ex}(2x - e)}$$

ex étant positif sur I, $g'(x)$ est du signe de $x \longmapsto 2x - e$

D'où $g'(x) < 0$ sur $\left[\frac{1}{e}, \frac{e}{2}\right]$ et $g'(x) > 0$ sur $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right[$ Ainsi :

$$\boxed{\text{g strictement décroissante sur } \left[\frac{1}{e}, \frac{e}{2}\right[}$$

$$\boxed{\text{g strictement croissante sur } \left[\frac{e}{2}, +\infty\right[}$$

2. On a : $g(x) = x(\frac{2}{e} - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x})$

Par croissance comparé du logarithme aux puissance de x on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} \quad \text{puis par somme} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e} - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{2}{e}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ on obtient par produit :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$$

3. — $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e^2} - 1 + 1 = \frac{2}{e^2}$

   — $g\left(\frac{2}{e}\right) = \frac{4}{e^2} - 1 - \ln 2 + 1 = \frac{4}{e^2} - \ln 2$

   Remarque 1

   Il semblerait qu'il y ait une erreur d'énoncé. La valeur intéressante à calculer est

$$g\left(\frac{e}{2}\right) = 1 - 1 - \ln e/2 = \ln 2 - 1 < 0$$

4. On obtient grâce aux questions précédentes :

x	e^{-1}		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$2e^{-2}$	$\searrow$	$\ln 2 - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

$x \longmapsto -x \ln x$. f est dérivable sur I de dérivée donnée par :

$$x \longmapsto -\ln x - \frac{x}{x} = -\ln x - 1$$

Posons alors $f : x \longmapsto (-x \ln x) + \dfrac{x^2}{e}$.

f est dérivable sur I de dérivée donnée par :

$$\forall x \in I, f'(x) = (-\ln x - 1) + \frac{2x}{e} = g(x)$$

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est une primitive de } g}$$

On note Y la fonction de chiffre d'affaire. D'après l'énoncé : $Y' = g$.

Il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $Y = f + c$
Comme $Y(1) = 0$ on trouve $c = Y(1) - f(1) = -e^{-1}$

$$\boxed{\text{Le chiffre d'affaire est } Y(x) = -x \ln x + \frac{x^2 - 1}{e}}$$

Exercice 2

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt{u_n}) = \frac{1}{2} \ln u_n = \frac{1}{2} v_n$

$$\boxed{(v_n) \text{ est donc une suite géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } v_0 = \ln e = 1}$$

   (b) On utilise la formule du terme général d'une suite géometrique.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}}$$

   On obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \exp v_n = \exp \frac{1}{2^n}}$$

2. (a) — Initialisation : $P_0 = u_0 = e = e^1 = e^{v_0}$.
   — Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n = e^{S_n}$.
   $P_{n+1} = \underbrace{P_n}_{e^{S_n}} \cdot \underbrace{u_{n+1}}_{e^{v_{n+1}}} = e^{S_n} \cdot e^{v_{n+1}} = e^{S_n + v_{n+1}} = e^{S_{n+1}}$

   Ce qui achève la récurrence

   (b) On utilise la formule de la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{v_0}_{1} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = 2 - \frac{1}{2^n}}$$

(c) On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 2}$

On en déduit par continuité de exp en 2 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = \exp 2}$$

Exercice 3

1. — Pierre a 3 chance sur 6 de tirer une pièce de 50 centimes
   — Ayant tiré une pièce de 50 centimes, il a ensuite 1 chance sur 5 de tirer celle de 1 euro

$$\boxed{\text{La probabilité recherchée est donc : } \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = 0.1}$$

2. Il y a que 2 façons d'arriver à un total de $1,50$ € avec 2 pièces : 1 + 0,50 € ou 0,50 + 1 €.
   — Cas : 0,50 € puis 1 € : Par 1) on a $p = 0.1$
   — Cas : 1 € puis 0,50 € : De la même manière qu'en 1) on a : $p = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = 0.1$

$$\boxed{p = 0.1 + 0.1 = 0.2}$$

3. On distingue les différents cas en appliquant le raisonnement effectué en 2).

x_i	1	$1,50$	2	$2,50$	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0.2	0.2	0	0.4	0.133	0.067

On vérifie bien que la somme des probabilités trouvées donne 1.

4. On utilise la définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i) = 1 \cdot 0.2 + 1,50 \cdot 0.2 + 2,50 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.133 + 4 \cdot 0.067 = 2.167$$

Cela signifie qu'en moyenne Pierre peut $\boxed{\text{espérer prendre 2.17 €}}$.

5. Notons p cette probabilité :

$$p = \mathbb{P}(X \geq 2,20) = \mathbb{P}(X = 2,50) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) = 0.4 + 0.133 + 0.067 = 0.4 + 0.2 = 0.6$$

$$\boxed{p = 0.6}$$

Exercice 4

1. Calculons si A vérifie l'équation du plan P :

$$2 \cdot 2 + (-3) - 1 = 0 \neq 1$$

$$\boxed{\text{Donc A} \notin P}$$

2. Un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan P est donné par les coefficient de son équation $P : 2x+y-z-1 = 0$. On a par exemple :

$$\boxed{\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

3. Comme en 2. on cherche un vecteur normal à R grâce à son équation. On obtient $\overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

   On a alors $\overrightarrow{m} = 2\overrightarrow{n}$ donc les deux vecteurs normaux sont colinéaires.

   Par théorème de cours on obtient donc que P et R sont parallèles.

Exercice 5

1. f est dérivable sur $I =]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables. On a $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ d'où :

$$\boxed{\forall x \in I, f'(x) = +\frac{1}{x^2}}$$

   D'où $f'(x) > 0$ sur I. Ainsi :

$$\boxed{\text{f est strictement croissante sur } I}$$

2. (a) On a :

$$\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

   Donc par la forme de f écrite ci dessus et addition de limites :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2}$$

(b) On en déduit graphiquement que la courbe (C) admet la droite $y = 2$ comme asymptote en $+\infty$ et la droite $x = 0$ comme asymptote en 0.

3. On a :
   — $f(1) = 1$
   — $f'(1) = 1$

   Donc par théorème de cours, la tangente à (C) en 1 est la droite d'équation :

$$\boxed{y = f(1) + (x - 1)f'(1) = x}$$

   On obtient bien la droite (D).