Concours externe
pour le recrutement de contrôleurs des douanes et droits indirects

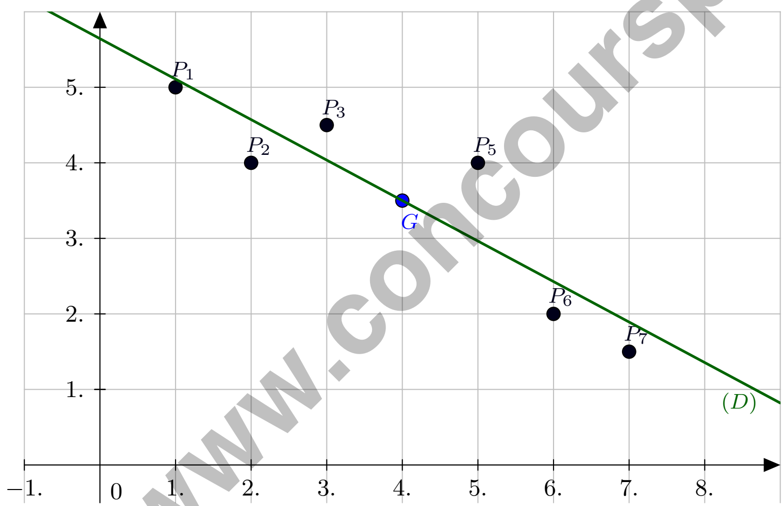
Branche de la surveillance

-

Corrigé année 2014

Exercice 1

1. Voici le nuage de points :



2. Le point G est obtenu en moyennant les coordonnées x_i et y_i indépendamment.
On a $G\left(\frac{1+2+3+5+6+7}{6}, \frac{5+4+4.5+4+2+1.5}{6}\right) = G\left(4; \frac{7}{2}\right)$

3. (a) D passe par $G(4; 3.5)$ d'où : $3.5 = -0.536 \cdot 4 + b$ puis $\boxed{b = 5.644}$

   (b) Voir la figure du 1.

4. On estime le prix en dizaine d'euros en 2012 (année 8) : $y = -0.536 \cdot 8 + 5.664 = 1.356$.

$$\boxed{\text{Donc le prix estimé est } p_{estimé} = 13.56 \text{ €}}$$

5. L'erreur est $\dfrac{|p_{estimé} - p_{réel}|}{p_{estimé}} = \dfrac{1.19}{13.56} \simeq 9\%$

Exercice 2

1. Le prix vaut $\boxed{u_1 = 2500.(1 - 0.20) = 2000}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors u_n est le prix de revente au bout de la $n^{ième}$ année. D'après l'énoncé, l'année suivante, il se revendra $u_{n+1} = u_n \cdot (1 - 0.2) = 0.8u_n$.

$$\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ est bien géométrique de raison } q = 0.8.}$$

   On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \cdot q^n = 2500 \cdot 0.8^n$

3. Tout d'abord (v_n) est bien définie car 2. montre que (u_n) est à termes strictement positifs. Enfin on a : $v_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln(0.8u_n) = \ln(0.8) + \ln(u_n)$.

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + \ln(0.8)}$$

   La suite (v_n) est donc une suite arithmétique.

4. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq 500$. La fonction ln est strictement croissante donc nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} u_n \leq 500 &\Leftrightarrow 2500 \cdot 0.8^n < 500 && (1) \\ &\Leftrightarrow 0.8^n < 0.2 && (2) \\ &\Leftrightarrow n \ln 0.8 < \ln 0.2 && (3) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0.2}{\ln 0.8} \simeq 7.21 && (4) \end{aligned}$$

   Le passage de (3) à (4) est délicat, il faut bien faire attention que $\ln 0.8 < 0$ et renverse l'inégalité.

$$\boxed{\text{Finalement on trouve } n = 8 \text{ années.}}$$

Exercice 3

Partie A

1.
$$f'(x) = 1 \cdot e^{x-3} - \left(-\frac{1}{(x+4)^2}\right) = e^{x-3} + \frac{1}{(x+4)^2}$$
$$\boxed{\forall x \in I = [0, +\infty[, \quad f'(x) = e^{x-3} + \frac{1}{(x+4)^2} > 0}$$

2. Nous avons montré que f' était strictement positive sur I. f est donc $\boxed{\text{strictement croissante}}$ sur $[0, +\infty[$.

3. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+4} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-3} = +\infty \end{cases}$ Par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

4. (a) On a $f(0) = e^{-3} - \frac{1}{4} \simeq -0.2$. D'où le tableau de variations :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	-0.2 $\nearrow$ $+\infty$

(b) f est continue et $\begin{cases} f(0) < 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires $f(x) = 0$ admet une solution sur $[0, +\infty[$. Enfin, par stricte croissance de f montrée en 2. on obtient l'unicité d'un tel x. On le note α.

f est strictement négative sur $[0, \alpha[$ puis strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$.

5. (a)

x	1.32	1.325	1.33
$f(x)$	-0.0016	-0.0005	0.0006

(b) Le tableau précédent nous permet d'affirmer que $\alpha \in]1.325, 1.33[$. Arrondi au centième on obtient : $\boxed{\alpha \simeq 1.33}$

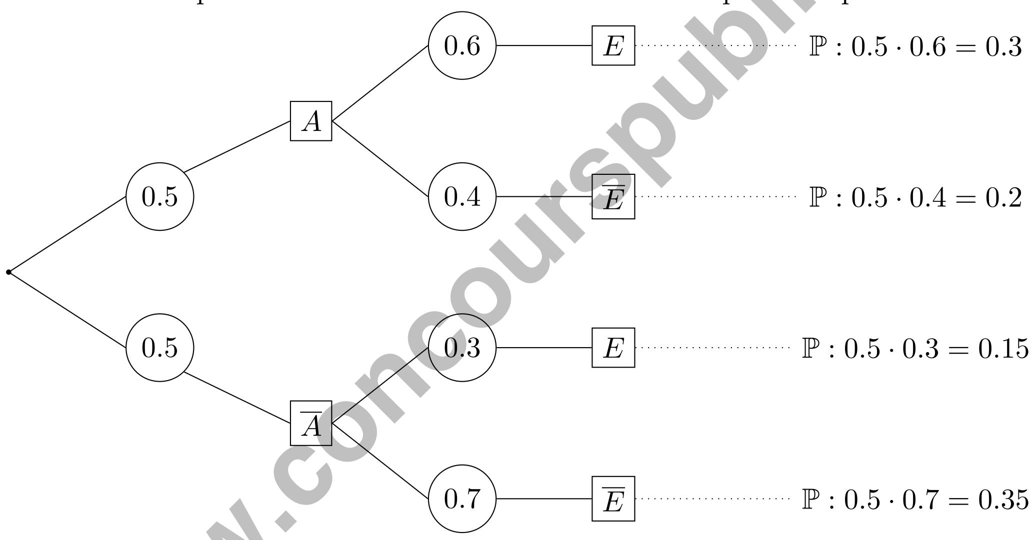
Partie B

1. On a $\boxed{\forall x \in [0, +\infty[,\ g'(x) = e^{x-3} - \frac{1}{x+4} = f(x)}$

2. On a $g' = f$ donc l'étude de signe de f de la partie A nous donne :
g est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

Exercice 4

1. (a) On complète l'arbre de probabilité. Calculer le produit des probabilités le long des branches n'est pas nécessaire mais est très recommandé pour les questions suivantes.



(b) On a d'après l'arbre : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap E) = 0.3}$

(c) On a d'après l'arbre : $\boxed{\mathbb{P}(\overline{A} \cap E) = 0.15}$

(d) Par la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap A) + \mathbb{P}(E \cap \overline{A}) = 0.45$

(e) Par définition de la probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(\overline{A} \mid E) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \dfrac{0.15}{0.45} = 0.33$

2. Introduisons la variable aléatoire X qui indique le nombre de victoires sur les 3 parties. Alors les expériences étant indépendantes, X suit une loi binomiale de paramètres $(3, \mathbb{P}(E))$. On obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbb{P}(E)^2(1-\mathbb{P}(E)) = 3 \cdot 0.45^2 \cdot 0.55 \simeq 0.334}$$