Concours externe
pour le recrutement de contrôleurs des douanes et droits indirects

Branche du contrôle des opérations commerciales et
d'administration générale

-

Corrigé année 2014

Exercice 1

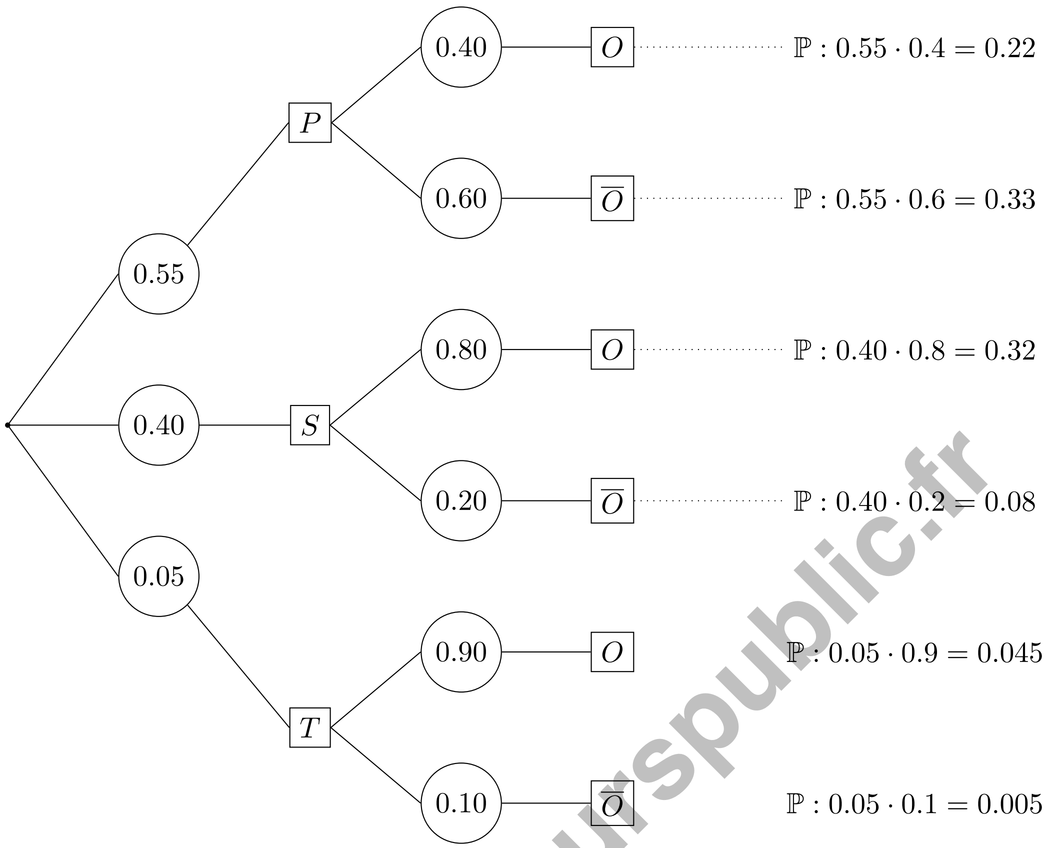
1. Les probabilités demandées sont tout simplement dans l'énoncé :

   — $\mathbb{P}_P(\overline{O}) = 60\% = 0.60$

   — $\mathbb{P}_S(O) = 80\% = 0.80$

   — $\mathbb{P}_T(\overline{O}) = 10\% = 0.10$

2. Voici l'arbre demandé :



3. D'après l'arbre de probabilités : $\boxed{\mathbb{P}(P \cap O) = 0.22}$

4. D'après la **formule des probabilités totales** :

$$\boxed{\mathbb{P}(O) = \mathbb{P}(O \cap P) + \mathbb{P}(O \cap S) + \mathbb{P}(O \cap T) = 0.22 + 0.32 + 0.045 = 0.585}$$

5. On cherche $\mathbb{P}_O(P)$. Par définition des probabilités conditionnelles on a :

$$\boxed{\mathbb{P}_O(P) = \frac{\mathbb{P}(P \cap O)}{\mathbb{P}(O)} = \frac{0.22}{0.585} = 0.376}$$

6. On cherche la probabilité p que **tous les 3** candidats concourent dans la branche des opérations commerciales. Par indépendance de ce choix on trouve :

$$\boxed{p = \mathbb{P}(O)^3 = 0.585^3 = 0.2}$$

Exercice 2

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est bien définie et **continue** sur $\mathbb{R}$. Son intégrale est donc bien définie. f est dérivable de dérivée précisément égale à $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ qui est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

2. On a $f(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t = 0$ Donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ passe par } (0,0).}$
   On a $f'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$.
   $$\boxed{\text{La tangente à } \mathcal{C} \text{ en } 0 \text{ est la droite d'équation } y = x}$$

3. tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et f l'est sur $\mathbb{R}$ donc comme composée on trouve :
   — g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
   — $\forall x \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\quad g'(x) = f'(\tan x) \cdot \tan'(x) = \dfrac{1}{1+(\tan x)^2} \cdot (1 + (\tan x)^2) = 1$
   On obtient alors :
   $$\boxed{g(x) = x + g(0) = x + f(0) = x}$$

4. — On a par 3. $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ et par définition : $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = f(1)$
   $$\boxed{f(1) = \frac{\pi}{4}}$$
   — De même on a $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. D'où :
   $$\boxed{f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}}$$

5. h est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée :
   $$h'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{x}^2}\frac{1}{x^2} = 0$$
   Ainsi $\boxed{h \text{ est constante}}$

   On trouve par exemple $h(1) = f(1) + f(1) = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\forall x > 0, \quad h(x) = \frac{\pi}{4}}$$

6. On a $f(x) = h(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - f\left(\frac{1}{x}\right)$

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ car f est continue en 0.

   Par composition des limites on trouve : $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ puis :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}}$$

7. Posons $F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) + f(-x) \end{array} \right.$. F est dérivable de dérivée :

   $F'(x) = f'(x) - f'(-x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(-x)^2} = 0$

   F est donc constante puis $F(0) = 2f(0) = 0$ donc F est nulle.

   On trouve bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x)}$$

Exercice 3

Notons : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$

Les deux fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition de dérivées :

$$f'(x) = \underbrace{3x^2}_{\geq 0} \qquad g'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{<0}$$

Ainsi il n'existe aucun couple (x, y) tel que $f'(x) = g'(y)$ et donc les courbes ne peuvent pas avoir de tangentes parallèles.