Concours externe pour l'accès au grade d'Inspecteur des Finances Publiques
Corrigé 2015

Exercice 1

1. (a) Après calcul il vient :

$$\boxed{P^2 = P}$$

   (b) En utilisant ce qui précède :

$$\boxed{PQ = 0,\ QP = 0,\ Q^2 = Q}$$

2. (a) Soit $A_1 = \alpha P + \beta Q$ et $A_2 = \alpha' P + \beta' Q$. En développant le produit il vient :

$$\boxed{A_1\dot{} A_2 = \alpha\alpha' P + \beta\beta' Q}$$

   $A_1\dot{} A_2$ appartient bien a ϕ.

   (b) Supposons que A^{-1} existe et posons $A^{-1} = \frac{1}{\alpha}P + \frac{1}{\beta}Q$
   Le calcul précédent montre alors que :

$$\boxed{AA^{-1} = P + Q = I}$$

3. (a) En posant $\lambda = \sqrt{2}$, on obtient bien le système demandé.

   (b) Par application directe de ce qui précède, on trouve :

$$\boxed{(P + \sqrt{2}Q)^{-1} = P + \frac{1}{\sqrt{2}}Q}$$

   Calcul :

$$(P + \sqrt{2}Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1 + \frac{3}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{4}(1 + \frac{3}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1) \end{pmatrix}$$

   (x, y, z) s'en déduisent alors :

$$\boxed{x = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{z = \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

Exercice 2

1. Les deux suites sont définies ainsi :
   $u_0 = \sin(\alpha)$ et $u_(n+1) = \sqrt{u_n v_n}$
   $v_0 = \tan(\alpha)$ et $v_(n+1) = \dfrac{2.u_n.v_n}{u_n + v_n}$

   α appartient à $]0; \frac{\pi}{2}[$ d'où $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$.
   Par récurrence immédiate au regard de la définition des suites, on a :

$$\boxed{u_n > 0 \ et \ v_n > 0}$$

2. Prouvons ce résultat par récurrence :
   Tout d'abord, on vérifie facilement que u_0 et v_0 satisfont la relation.
   Supposons la propriété vraie au rang n. On a alors :

$$\begin{aligned} v_(n+1) &= \frac{2^n.2^n \sin(\frac{\alpha}{2^n}) \tan(\frac{\alpha}{2^n})}{2^n.(sin(\frac{\alpha}{2^n}) + \tan(\frac{\alpha}{2^n}))} \\ &= \frac{2^n \sin^2(\frac{\alpha}{2^n})}{sin(\frac{\alpha}{2^n}) \cos(\frac{\alpha}{2^n}) + \sin(\frac{\alpha}{2^n}))} \\ &= \frac{2^n \sin(\frac{\alpha}{2^n})}{\cos^2(\frac{\alpha}{2^{n+1}})} \\ &= \frac{2^{n+1} \sin(\frac{\alpha}{2^{n+1}})}{\cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}})} \\ &= 2^{n+1} \tan(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : v_n = 2^n \tan(\frac{\alpha}{2^n})}$$

   En utilisant les règles de calcul trigonométrique, on parvient au résultat désiré pour u_n .

3. Calculons $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1}\sin(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) - 2^n\sin(\frac{\alpha}{2^n}) \\ &= 2^n(2\sin(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) - \sin(\frac{\alpha}{2^n})) \\ &= 2^{n+1}\sin(\frac{\alpha}{2^{n+1}})(\cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) - 1) \\ &= u_n(1 - \cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}})) \end{aligned}$$

Or $u_n > 0$ et $1 - \cos < 0$. Ainsi :

$$\boxed{u_n \text{ est croissante}}$$

Calculons maintenant $v_{n+1} - v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2^{n+1}\tan(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) - 2^n\tan(\frac{\alpha}{2^n}) \\ &= 2^n(2\tan(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) - \tan(\frac{\alpha}{2^n})) \\ &= 2^n(2\tan(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) - \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2^{n+1}})}{1 - \tan^2(\frac{\alpha}{2^{n+1}}))} \\ &= -2^{n+1}\tan^3(\frac{\alpha}{2^{n+1}})\frac{1}{1 - \tan^2(\frac{\alpha}{2^{n+1}})} \end{aligned}$$

Or $tan^3(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) > 0$ et $tan^2(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) < 1$ puisque $\frac{\alpha}{2^{n+1}} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$
Ainsi : $v_{n+1} - v_n < 0$ d'où

$$\boxed{u_n \text{ est décroissante}}$$

On sait que $v_{n+1} = \dfrac{2u_n.v_n}{u_n + v_n}$ d'où : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2u_n}{u_n + v_n}$
Or $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$
On en déduit que :

$$\boxed{v_n > u_n}$$

4. v_n est décroissante minorée par 0 donc elle converge et u_n est croissante majorée par v_0 donc elle converge.
Montrons qu'elles ont la même limite.
on pose $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $l' = \lim_{n\to+\infty} v_n$. En utilisant la définition de u_n il vient :
$l = \sqrt{ll'}$
Ainsi :

$$\boxed{l = l'}$$

Afin de determiner leur limite commune, on utilise l'equivalent de sinus en 0 : $\sin(x) \sim x$
Ainsi, en 0 : $u_n \sim 2^n \frac{\alpha}{2^n} = \alpha$
La limite commune des deux suites est donc :

$$\boxed{l = \alpha}$$

Exercice 3

1. L'équatiion du plan (P) recherché est la suivante :

$$P: \ ax + by + cz = p$$

Puisqu'elle contient $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} 3$ les droites (d) et (d') de vecteurs directeurs respectifs $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 1$ et $d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} 1$.
Un point appartenant à (d) ou (d') s'écrit respectivement :
$M = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2+\alpha \end{pmatrix} 3+\alpha$ ou $M' = \begin{pmatrix} 1+\alpha' \\ 2+2\alpha' \end{pmatrix} 3+\alpha'$
Puisque $A \in (P)$ on sait déjà que $p = a + 2b + 3c$
Soient $M \in (d)$ et $M' \in (d')$ on a alors :

$$ax_M + by_M + cz_M = ax_{M'} + by_{M'} + cz_{M'}$$

En choissisant $\alpha = 1$ et $\alpha' = 1$ on obtient : $b = 0$
L'équation de (P) devient alors :

$$(x-1)a + (z-3)c = 0$$

En utilisant le fait que $A' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} 4 \in (P)$ on obtient ensuite : $a = -c$
on a donc $(P): \ a((x-1) - (z-3)) = 0$ et on peut expliciter une équation de plan :

$$\boxed{(P): \ x - z = -2}$$

2. Soient nos 4 points : A=$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$,C=$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ D=$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$
notons A', B', C' et D' les milieux des segments AB, BC, CD et DA respectivement.
On a alors :
A'=$\begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \frac{a_2+b_2}{2} \end{pmatrix}$, B'=$\begin{pmatrix} \frac{b_1+c_1}{2} \\ \frac{b_2+c_2}{2} \end{pmatrix}$ C'=$\begin{pmatrix} \frac{c_1+d_1}{2} \\ \frac{c_2+d_2}{2} \end{pmatrix}$ D'=$\begin{pmatrix} \frac{d_1+a_1}{2} \\ \frac{d_2+a_2}{2} \end{pmatrix}$

Il nous reste à calculer les vecteurs associés :
$\overrightarrow{A'B'}= \begin{pmatrix} \frac{c_1-a_1}{2} \\ \frac{c_2+a_2}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B'C'}= \begin{pmatrix} \frac{d_1-b_1}{2} \\ \frac{d_2-b_2}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C'D'}= \begin{pmatrix} \frac{a_1-c_1}{2} \\ \frac{a_2-c_2}{2} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{D'A'}= \begin{pmatrix} \frac{b_1-d_1}{2} \\ \frac{b_2-d_2}{2} \end{pmatrix}$
On constate que $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires de même norme. Il en va de même pour $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{D'A'}$.

$$\boxed{\text{A'B'C'D' est un parallélogramme}}$$

Exercice 4

1. On considère la fonction f_λ telle que :

$$f_\lambda(x) = x^{x^\lambda}$$

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Par croissances comparées :

$$Si\ \alpha > 0, \lim_{x \to +0^+} x^\alpha \ln(x) = 0 \qquad Si\ \alpha < 0, \lim_{x \to +0^+} x^\alpha \ln(x) = -\infty$$

3. (a) Réécrivons f :

$$f_\lambda(x) = e^{x^\lambda \ln x}$$

La fonction exponentielle admet une limite à la fois en 0 et en $-\infty$. Par composition des limites :

$$\boxed{Si\ \lambda > 0, \lim_{x \to +0^+} f_\lambda = 1\ et\ Si\ \lambda < 0, \lim_{x \to +0^+} f_\lambda = 0}$$

(b) Nous pouvons donc prolonger f_λ de la manière suivante :

$$\boxed{Si\ \lambda > 0, f_\lambda(0) = 1\ et\ Si\ \lambda < 0, f_\lambda(0) = 0}$$

(c) On cherche à calculer la tangente à l'origine de f_λ. Regardons la limite du taux de variation $\tau(x) = \frac{f_\lambda(x)-f_\lambda(0)=}{x} = f'_\lambda(0)$ en prenant compte du prolongement par continuité effectué à la question précédente.

— $\lambda > 0$: $\lim_{x \to +0^+} f_\lambda = 1$. En utilisant l'équivalent $e^x - 1 \sim x$ au voisinage de 0 il vient : $\tau(x) \sim x^{\lambda-1} \ln(x)$.
Puis, on obtient l'équation de la tangente par croissances comparées :

$$\lambda > 1, C_\lambda : y = 1$$

$$\lambda < 1, C_\lambda : x = 0$$

— $\lambda < 0$: $\lim_{x\to+0^+} f_\lambda = 0$.

$$\begin{aligned}\tau(x) =& \frac{f_\lambda(x)}{x}\\ =& \frac{x^{x^\lambda}}{x}\\ =& x^{x^\lambda - 1}\\ =& e^{(x^\lambda-1)\ln(x)}\end{aligned}$$

Or $\lambda < 0$ donc par croissances comparées, $\lim_{x\to+0^+}(x^\lambda - 1)\ln(x) = -\infty$. Par composition des limites il vient :

$$\lambda < 0, C_\lambda : y = 0$$

4. (a) En appliquant les règles de calcul usuelles il vient :

$$\boxed{f'_\lambda(x) = f_\lambda(x)(\lambda\ln(x) + 1)x^{\lambda-1}}$$

   (b) La dérivée de f_λ s'annule en $x_0 = e^{-\frac{1}{\lambda}}$. En fonction du signe de λ, f_λ est positive puis négative ou l'inverse. Ainsi, si $\lambda > 0$, f_λ admet un minimum et si $\lambda < 0$, f_λ admet un maximum.

5. (a) Le développement de f_λ au voisinage de 1 à l'ordre 2 s'écrit :

$$\delta(x) = f_\lambda(1) + f'_\lambda(1)(x-1) + f''_\lambda(1)(x-1)^2 + o(x^2)$$

   $f_\lambda(1) = 1$, $f'_\lambda(1) = 1$, $f''_\lambda(1) = 2\lambda$
   d'où :

$$\boxed{\delta(x) = x + 2\lambda(x-1)^2 + o(x^2)}$$

   (b) Au point $x = 1$ la tangente de f_λ a pour équation : $y(x) = x$.
   On peut alors écrire au voisinage de ce point :
   $f_\lambda(x) - x \approx \delta(x) - x = 2\lambda x^2$

$$\boxed{\text{Si } \lambda > 0,\ f_\lambda \text{ est au dessus de sa tangente. Sinon } f_\lambda \text{ est en dessous.}}$$

6. (a) A nouveau par croissances comparées et composition des limites, on a :

$$\boxed{Si\ \lambda > 0,\ \lim_{x\to+\infty} f_\lambda = \infty\ et\ si\ \lambda < 0,\ \lim_{x\to+-\infty} f_\lambda = 1}$$

   (b) Soient $\lambda > \mu$. on sait que si $x \in [0,1], x^\lambda \leq x^\mu$ et si $x \in [1,\infty], x^\lambda \geq x^\mu$.
   Or sur $]0,1], \ln(x) \leq 0$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^\lambda\ln(x) \geq x^\mu\ln(x)$
   Puis par croissance de l'exponentielle il vient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\lambda(x) > f_\mu(x)}$$