Concours externe

pour le recrutement de contrôleurs des douanes et droits indirects

Branche de la surveillance

-

Corrigé 2016

Exercice 1

1. On sait que p_1, p_2, p_3, et p_4 forment une progression arithmétique, c'est à dire :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in [1,4], p_n = p_4 - a(4-n)$$

En déterminant a, nous pouvons résoudre la suite. On sait que $\sum_{n \in [1,4]} p_n = 1$ ie :

$$4p_4 - 6a = 1$$

Ainsi, puisque $p_4 = 0.4$:

$$\boxed{a = 0.1}$$

On obtient le résultat attendu.

2. (a) On note $A_{n,i}$ l'évènement on tire les chiffre i au lancer n. Ainsi, on s'intéresse à la probabilité

$$P = p(A_{1,1} \cap A_{2,2} \cap A_{3,4})$$

Par indépendance, il vient : $P = p_1 p_2 p_4$ soit

$$\boxed{P = 0.008}$$

(b) Les combinaisons correspondantes sont : [1,2,3], [1,3,4] et [2,3,4]. Ces évènements étant disjoints, la probabilité de leur union vaut la somme des probabilités. En appliquant la méthode précédente il vient :

$$\boxed{P = 0.038}$$

3. (a) Si l'on obtient un premier 4 au n-ième lancer, cela signifie que sur les n-1 premiers, on a eu que des 1,2 ou 3. On peut donc calculer la probabilité U_n :

$$U_n = P(A_{n,4} \bigcap_{k<n} \overline{A_{k,4}})$$

D'où, par indépendance des $A_{k,i}$,

$$U_n = P(A_{n,4}) \prod_{k<n} \overline{A_{k,4}}$$

D'où :

$$\boxed{P(U_n) = 0.6^{n-1}0.4}$$

U_n est bien une suite géométrique de raison 0.6<1 (donc converge) et de premier terme 0.4.

(b) On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_n$. Il s'agit de la somme du terme général d'une suite géométrique : S_n est donc **convergente** et on a :

$$\begin{aligned} S = \lim_{n\to+\infty} S_n &= \sum_{k=1}^{+\infty} U_n \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 0.6^n 0.4 \\ &= 0.4 \sum_{k=1}^{+\infty} 0.6^n \quad \text{On effectue un décalage d'indice :} \\ &= 0.24 \sum_{k=0}^{+\infty} 0.6^n \quad \text{On applique la formule du cours :} \\ &= \frac{0.24}{0.4} \end{aligned}$$

Après calcul :

$$\boxed{S = 0.6}$$

Exercice 2

1. On étudie la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{4}$$

Calculons u_2 : $u_2 = u_1 - \frac{u_0}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ d'où $u_2 = \frac{3}{4}$.

On constate que $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ et $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$, la suite n'est donc ni arithmétique ni géométrique.

2. On pose $v_n = u_{n+1} - \frac{u_n}{2}$

   (a) Calculons $v_0 = u_1 - \frac{u_0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

   (b) Calculons $v_n + 1$ en fonction de v_n . On va utiliser l'expression de u_{n+2} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{u_{n+1}}{2} \\ &= u_{n+1} - \frac{u_n}{4} - \frac{u_{n+1}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(u_{n+1} - \frac{u_n}{2}) \\ &= \frac{v_n}{2} \end{aligned}$$

   (c) Nous venons de prouver que $v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$.

$$\boxed{v_n \text{ est donc une suite géometrique de raison } \frac{1}{2} \text{ est de premier terme } v_0 = 1}$$

   (d) Par définition d'une suite géométrique :

$$\boxed{v_n = \frac{1}{2^n} v_0 = \frac{1}{2^n}}$$

3. (a) On étudie la suite w_n définie par $w_n = \frac{u_n}{v_n}$. Elle est bien définie puisque v_n ne s'annule jamais. Ainsi, $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$

   (b) Calculons w_{n+1} :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \quad \text{En utilisant les questions précédentes :} \\ &= 2\frac{v_n + \frac{u_n}{2}}{v_n} \\ &= 2 + \frac{u_n}{v_n} \end{aligned}$$

   (c) Au regard du résultat précédent :

$$\boxed{w_{n+1} = w_n + 2}$$

   (d) w_n est donc une suite arithmétique de premier terme $w_0 = -1$ et de raison 2. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2n - 1}$$

4. On rassemble ici tous les résultats précédents :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n} \Leftrightarrow u_n = w_n v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{2n-1}{2^n}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n-1}{2^n}}$$

5. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrons par récurrence que $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$.

— initialisation : $S_0 = u_0 = -1 = 2 - \dfrac{3}{2^0} = 3 - 2$. La récurrence est bien initialisée.

— Supposons la relation vraie au rang n.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} \\ &= 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{2(n+1)-1-4n-6}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-2n-5}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Le récurrence est validée.

On conclue :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}}$$

Exercice 3

1. (a) On étudie la fonction $\phi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$ définie sur $D = [1, +\infty[$. On s'intéresse à son sens de variation. ϕ est dérivable et $\phi'(x) = 2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$.
Il est manifeste que $\forall x \in D,\ \phi'(x) < 0$. Ainsi :

$$\boxed{\phi \text{ est décroissante sur } D}$$

(b) $\ln e = 1$ d'où $\phi(e) = 1 - e^2 = -6,39$.
De plus, $\phi(1) = 2$. ϕ étant est strictement décroissante sur D elle l'est aussi sur $[1, e[$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires , ϕ s'annule une unique fois en $\alpha \in [1, e[$

(c) Toujours par le théorème des valeurs intermédiaires :

— $\phi(x) > 0\ \forall x \in [1, \alpha[$

— $\phi(x) < 0\ \forall x \in]\alpha, +\infty[$

2. (a) On s'intéresse maintenant à la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ définie sur D . f est dérivable et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1+x^2}{x} - 2x\ln x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2} \\ &= \frac{\phi(x)}{x(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

(b) Sur D , $x(1+x^2)^2 > 0$ d'où le signe de f' est celui de ϕ . On réalise alors un tableau de variation (en anticipant la question suivante) :

x	1		α		$+\infty$
ϕ		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

(c) La positivité de f est évidente sur D . De plus, $\forall x \in D\ 1+x^2 > x^2$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in D,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}}$$

(d) On sait, par croissances comparées que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$. Ainsi, par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Exercice 4

1. On considère le plan (P) d'équation $2y + z - 6 = 0$ et le plan (Q) d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

Au regard de ces équations, on leur associe respectivement les vecteurs normaux $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Manifestement, $\overrightarrow{p}.\overrightarrow{q} = 0$.

$$\boxed{\text{Les deux plans sont donc orthogonaux}}$$

2. Trouvons un vecteur directeur de (D) : $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est tout indiqué.

   on constate que $\overrightarrow{p}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{q}.\overrightarrow{AI = 0}$.

$$\boxed{\text{(D) est donc bien l'intersection des 2 plans}}$$

3. Soit $\overrightarrow{j}$ un vecteur directeur de l'axe $(0, \overrightarrow{j})$. On sait que $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   On constate que $\overrightarrow{p}.\overrightarrow{j} \neq 0$ et $\overrightarrow{q}.\overrightarrow{j} \neq 0$. Ainsi, (P) et (Q) coupent l'axe $(0, \overrightarrow{j})$.
   Cherchons l'intersection de ces plans avec cet axe. On cherche donc des points B et C de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$.

   — intersection de (P) et de l'axe : on utilise l'équation de plan de (P) : $2a + 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 3$
   Ainsi

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

   — intersection de (Q) et de l'axe : on utilise l'équation de plan de (Q) : $a - 2.0 + 12 = 0 \Leftrightarrow a = -12$
   Ainsi

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

4. Commençons par calculer le vecteur $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$. Puisque $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (T), on peut en choisir un autre colinéaire. Prenons $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

On sait donc que l'équation du plan (T) s'écrit :

$$x + 4y + 2z = d$$

Déterminons d : B $\in$ (T) d'où, en remplaçant dans l'équation : $0 + 3.4 + 0 = d$.
Ainsi :

$$\boxed{(\mathrm{T}) : x + 4y + 2z - 12 = 0}$$