Concours externe pour l'accès au grade d'Inspecteur des Finances Publiques
Corrigé année 2016

Exercice 1

I Etude des fonctions polynomiales P_n

1. P_n est dérivable comme fonction polynomiale. On a alors :

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}(x^k)' = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}(kx^{k-1}) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k x^{k-1}$$

$$P_n'(x) = \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^{k+1}x^k = -\sum_{k=0}^{2n-1}(-x)^k$$

Rappel 1

La somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

On obtient donc :

$$\boxed{P_n'(x) = -\frac{(-x)^{2n}-1}{-x-1} = \frac{x^{2n}-1}{x+1}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{2n} = 1 \Leftrightarrow x = 1 (x > 0)$$

$$P_n(0) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$$

On obtient le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
P_n	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. On a d'après le tableau de variations, $P_n(1) \leq 0$. L'inégalité est en fait stricte car $P_n'(x) < 0$ sur $]0, 1[$. D'où :

$$\boxed{P_n'(1) < 0}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k}{k} x^k \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} x^k}_{} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} x^{2n+2} \\
&= P_n(x) + \frac{-1}{2n+1} x^{2n+1} + \frac{1}{2n+2} x^{2n+2} \\
&= P_n(x) + x^{2n+1} \left(\frac{-1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right)
\end{aligned}$$

(b) Raisonnons par récurrence.

— Initialisation : Pour $n = 1$ on a $P_1(2) = -2 + \dfrac{2^2}{2} = 0 \geq 0$

— Soit $n \geq 1$ tel que $P_n(2) \geq 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(2) &= P_n(2) + 2^{2n+1} \left(\frac{-1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} \right) \\
&= P_n(2) + 2^{2n+1} \frac{-(2n+2) + 2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}) \\
&= \underbrace{P_n(2)}_{\geq 0} + \underbrace{2^{2n+1} \frac{2n)}{(2n+1)(2n+2)})}_{\geq 0} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

— Ce qui achève la récurrence

$$\boxed{\forall n \in Ne, \quad P_n(2) \geq 0}$$

5. On a vu en 3. que $P_n(1) < 0$ et en 4. $P_n(2) \geq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'une solution de l'équation $P_n(x) = 0$ dans $]1, 2]$. Enfin le tableau de variation de 2 nous assure que P_n est strictement croissant sur $[1, +\infty[$ et donc l'unicité d'une solution.
On note x_n cette solution et on a :

$$\boxed{P_n(x_n) = 0, \qquad 1 < x_n \leq 2}$$

II Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. On a vu en 1. $P_n'(x) = \dfrac{x^{2n} - 1}{x + 1}$ et $P_n(0) = 0$.
On a $P_n(x) - P_n(0) = \displaystyle\int_0^x P_n'(t)\mathrm{d}t$. D'où le résultat :

$$\boxed{P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\mathrm{d}t}$$

2. Par définition, $P_n(x_n) = 0$ On obtient avec 1. :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\mathrm{d}t + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1}\mathrm{d}t + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1}\mathrm{d}t = \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}\mathrm{d}t}$$

3.

$$\begin{aligned} t^{2n} - 1 &= (t^2)^n - 1^n \\ &= (t^2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(t^2)^k}_{\geq 1} \\ &\geq (t^2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &\geq n(t^2 - 1) \end{aligned}$$

4. On a $t + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ d'où par 3. $\dfrac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq n \dfrac{t^2 - 1}{t + 1} = n(t - 1)$

   On a $x_n > 1$ donc par croissance de l'intégrale, on peut intégrer l'inégalité de 1 à x_n ce qui donne :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \mathrm{d}t \geq \int_1^{x_n} n(t - 1) \mathrm{d}t = n \left[\frac{(t - 1)^2}{2} \right]_1^{x_n} = \boxed{\frac{n}{2}(x_n - 1)^2}$$

   On a également $1 - t^{2n} \leq 1$ sur $[0, 1]$ d'où en intégrant de la même manière on obtient :

$$\int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{1}{t + 1} \mathrm{d}t = [\ln(1 + t)]_0^1 = \ln(2)$$

   Enfin on utilise l'égalité montré en 2. pour obtenir :

$$\frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \leq \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} \mathrm{d}t \leq \ln(2)$$

   Donc comme $x_n - 1 > 0$:

$$\boxed{0 < x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}}$$

5. On a $\sqrt{\dfrac{2\ln(2)}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement $\boxed{x_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$

   Donc (x_n) converge et on a la limite :

$$\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1}$$

Exercice 2

1. (a) On a

   — $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

   — $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

   — A est de taille 2 donc a au plus 2 valeurs propres

   Donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A)=\{0,1\}}$$

   (b) Nous utilisons les deux vecteurs propres trouvés à la question précédente que nous normalisons. On pose :

$$P=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

   On a P inversible (triangulaire à diagonale ne s'annulant pas) et le calcul donne :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

   On vérifie que $P^{-1}DP=A$.

   Rappel 2

   Pour trouver une matrice de passage diagonalisant une matrice A, il suffit de concaténer des vecteurs propres indépendants normalisés pour former P.

   (a) — $0\in E$ donc $E\neq\emptyset$

   — Soit $(M,N)\in E^2,\lambda\in\mathbb{R}$ alors il est immédiat que $M+\lambda N\in E$ par linéarité à gauche et à droite du produit matriciel.

   Donc E est bien un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

   (b)

$$\begin{aligned}M\in E &\Leftrightarrow AM=MD\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}z & t\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & y\\ 0 & t\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow z=0 \quad\text{et}\quad y=t\end{aligned}$$

   (c) — $AU=0=UD$ donc $U\in E$

— $A^2 = A$ et $AD = A$ donc $A \in E$

D'après (b) on a :

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, M = xU + yA \end{aligned}$$

Donc (U, A) est une famille génératrice de E.

Par ailleurs cette famille est libre, en effet, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda A + \mu U = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

Donc $\boxed{(U,A) \text{ est une base de E}}$ et alors $\boxed{\dim(\text{E}) = 2}$

(d)

$$UA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En reprenant les notation de (b) on a $y \neq t$ donc

$$\boxed{UA \notin E}$$

2. (a) Immédiat par bilinéarité du produit matriciel

(b) $M \in \ker f \Leftrightarrow AM = DM \Leftrightarrow M \in E$ On a donc :

$$\boxed{\ker(f) = E, \quad \dim(\ker(f)) = 2}$$

(c) D'après le théorème du rang on a $\dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(M_2(\mathbb{R}))$ D'où

$$\boxed{\text{rg}(f) = 4 - 2 = 2}$$

(d) Reprenons les notations de 2.b) pour les coordonnées de M

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow AM - MD = M \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z & t-y \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow z = x \ \text{ et } \ t = 0 \ \text{ et } \ t - y = y \\ &\Leftrightarrow z = x \ \text{ et } \ t = 0 \ \text{ et } \ y = 0 \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\boxed{f(M) = M \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad M = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

De même :

$$\begin{aligned} f(M) = -M &\Leftrightarrow AM - MD = -M \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z & t-y \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow z = -x \ \text{ et } \ t = 0 \ \text{ et } \ t - y = -y \ \text{ et } \ z = -z \\ &\Leftrightarrow z = -x \ \text{ et } \ t = 0 \ \text{ et } \ z = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(M) = -M \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad M = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Finalement 1 et -1 sont valeurs propres de f.

(e) On a démontré que :
- $\dim(\ker(f)) = 2$
- $\dim(\ker(f - Id)) = 1$
- $\dim(\ker(f + Id)) = 1$

On a $2 + 1 + 1 = 4$ donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

(f) Dans une base diagonalisant f on a :

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_f$$

Donc $\boxed{f \circ f \circ f = f}$

Exercice 3

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
   - Associativité de $\oplus$:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x + y - 1) \oplus z = x + y + z - 2 = x \oplus (y \oplus z)$$

   - Commutativité de $\oplus$:

$$x \oplus y = x + y - 1 = y + x - 1 = y \oplus x$$

— Associativité de $\otimes$:

$$\begin{aligned}(x \otimes y) \otimes z &= (x+y-xy) \otimes z = (x+y-xy) + z - (x+y-xy)z \\ &= x+y+z-xy-zx-yz+xyz \\ &= x \otimes (y \otimes z)\end{aligned}$$

— Distributivité à droite :

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \otimes z &= (x+y-1) \otimes z = (x+y-1) + z - (x+y-1)z \\ &= x+y+2z-xz-yz-1 \\ x \otimes z \oplus y \otimes z &= (x+z-xz) \oplus (y+z-yz) \\ &= x+y+2z-xz-yz-1\end{aligned}$$

— Distributivité à gauche : Idem

— Élément neutre de $\oplus$:

$$a \oplus 1 = a$$

— Inverse pour $\oplus$:

$$x \oplus (2-x) = x+2-x-1 = 1$$

— Élément neutre pour $\otimes$:

$$x \otimes 0 = x = 0 \otimes x$$

Donc $\boxed{(\mathbb{R}, \oplus, \otimes) \text{ est un anneau}}$.

Remarque 1

On note que les éléments neutres habituels de $+$ et $\times$ sont inversés. Il faut faire attention lorsque l'on montre l'existence d'inverse pour $\oplus$ à bien retrouver 1.

2. On a $x \otimes y = x + y - xy = y + x - yx = y \otimes x$ donc $\boxed{\text{l'anneau est commutatif}}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   Posons $y = \dfrac{x}{x-1}$, on a alors :

$$x \otimes y = x + y - xy = x + \frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{x-1} = x + \frac{x(1-x)}{x-1} = x - x = 0$$

Donc tout élément non nul a un inverse à droite puis un inverse par commutativité.

Donc $\boxed{(\mathbb{R}, \oplus, \otimes) \text{ est un corps}}$.

Exercice 4

1. Par hypothèse il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tels que :

$$n = a^2 + b^2, \quad p = c^2 + d^2$$

Alors :

$$np = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Donc np est également somme de 2 carrés.

Remarque 2

L'indication suggère de raisonner en complexes afin de trouver cette factorisation, en écrivant pour $z = a + ib, z' = c + id$ on a

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|z'|^2 = (z\overline{z})(z'\overline{z'}) = (zz')\overline{zz'}$$

avec $zz' = (ac - bd) + i(ad + bc)$

2. On a $2005 = 5 \cdot 401$.
En utilisant 1. on obtient :

$$\boxed{2005 = (20 - 2)^2 + (1 + 40)^2 = 18^2 + 41^2}$$