Concours externe
pour le recrutement de contrôleurs des douanes et droits indirects

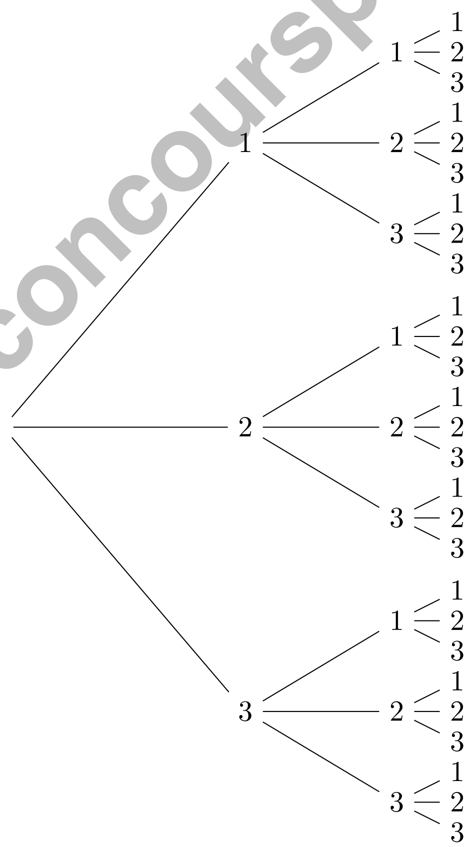
Branche de la surveillance

-

Corrigé 2017

Exercice 1

1. On réalise un arbre donnant tous les enchaînements de tirage possible, sachant qu'il y a remise.



$\boxed{\text{Pour obtenir un tirage particulier, on suit l'un des 27 chemins sur l'arbre.}}$

2. (a) Il y a 4 cas de figure :
   - les trois chiffres sont identiques : le joueur gagne 25-10= 15 euros. $X = 15$
   - Les trois chiffres sont differents, le joueur gagne 15-10= 5 euros. $X = 5$
   - La somme des trois chiffres vaut 7, le joueur gagne 13-10= 3 euros. $X = 3$
   - Le joueur ne remplit aucune des conditions précédentes : il perd 10 euros. $X = -10$

   (b) Afin de déterminer la loi de probabilité de X , on va compter dans l'arbre le nombre de cas où une condition particulière est remplie. On en déduit la loi de probabilité suivante :

X	-10	3	5	15
$P(X)$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{9}$

   (c) En utilisant la définition de l'espérance $E(X) = \sum_X XP(X)$ il vient :

$$\boxed{E(X) = -1}$$

   Le jeu est défavorable au joueur.

Exercice 2

1. (a) La population diminue de 2% par an. Ainsi,

$$u_{n+1} = 0.98u_n$$

   On calcule alors u_1 et u_2 :

$$u_1 = 0.98u_0 = 196000$$
$$u_2 = 0.98u_1 = 192080$$

   (b) Comme indiqué précédemment :

$$\boxed{u_{n+1} = 0.98u_n}$$

   (c) La suite u_n est donc une suite géométrique de raison 0.98. On en déduit son expression :

$$\boxed{u_n = 0.98^n u_0}$$

   (d) A l'aide de la calculatrice on trouve :

$$\boxed{u_{10} = 163414.56}$$

2. (a) On sait que $v_n = 120000.(1.01)^n$. La population au premier janvier 2019 vaut v_2 soit :

$$\boxed{122412 \text{ habitants}}$$

   (b) Toujours avec la calculatrice on calcule :

$$\boxed{v_{10} = 132554.66}$$

3. On cherche n tel que $v_n > u_n$ soit :

$$120000.(1.01)^n > 0.98^n 200000 \Leftrightarrow (\frac{1.01}{0.98})^n > \frac{5}{3}$$

Or la fonction ln est croissante et $\ln(\frac{1.01}{0.98}) > 0$ d'où la condition limite :

$$n > \frac{\ln \frac{5}{3}}{\ln \frac{1.01}{0.98}}$$

On en déduit la condition pratique :

$$\boxed{n > n_{lim} = 17}$$

Exercice 3

1. (a) On s'intéresse à la fonction $f(x) = e^{2x} - 3e^x + x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.
   Calculons $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
   — $\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$
   — $\lim_{x \to -\infty} x + 2 = -\infty$
   D'où :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

   (b) Étudions la fonction $g = f - y$. Il vient : $g(x) = e^{2x} - 3e^x$.
   Par ce qui précède : $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{D est bien une asymptote de C en } -\infty}$$

   (c) On s'intéresse au signe de $g(x) = e^{2x} - 3e^x$.

$$\begin{aligned} g(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} > 3e^x \\ &\Leftrightarrow e^x > 3 \\ &\Leftrightarrow x > \ln(3) \end{aligned}$$

   On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{C et strictement au dessus de D pour } x > \ln(3)}$$

2. On factorise $f(x)$ par e^x . Il vient

$$f(x) = e^x(e^x - 3 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x})$$

Calculons alors $\lim_{x \to -\infty} f(x)$:

— $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparées.

— $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

— On en déduit $\lim_{x \to -\infty} e^x - 3 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} = +\infty$

Enfin, $\lim_{x \to -\infty} e^x = +\infty$ d'où :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$$

3. (a) En utilisant les règles de dérivation usuelles :

$$\boxed{f'(x) = 2e^{2x} - 3e^x + 1}$$

.

(b) En développant le produit, on retombe sur la formule du 3(a).

(c) Au regard de la forme de $f'(x)$ établie précédemment, on obtient :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2}$ ou $e^x = 1$ soit :

$$\boxed{x = -\ln(2) \text{ ou } x = 0}$$

On peut alors établir un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(d) Dressons pour terminer le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{3}{4} - \ln(2)$	↘	0	↗	$+\infty$

4. (a) Commençons par déterminer la pente de la tangente au point $\ln(\frac{3}{2})$. Par définition : $p = f'(\ln(\frac{3}{2}))$

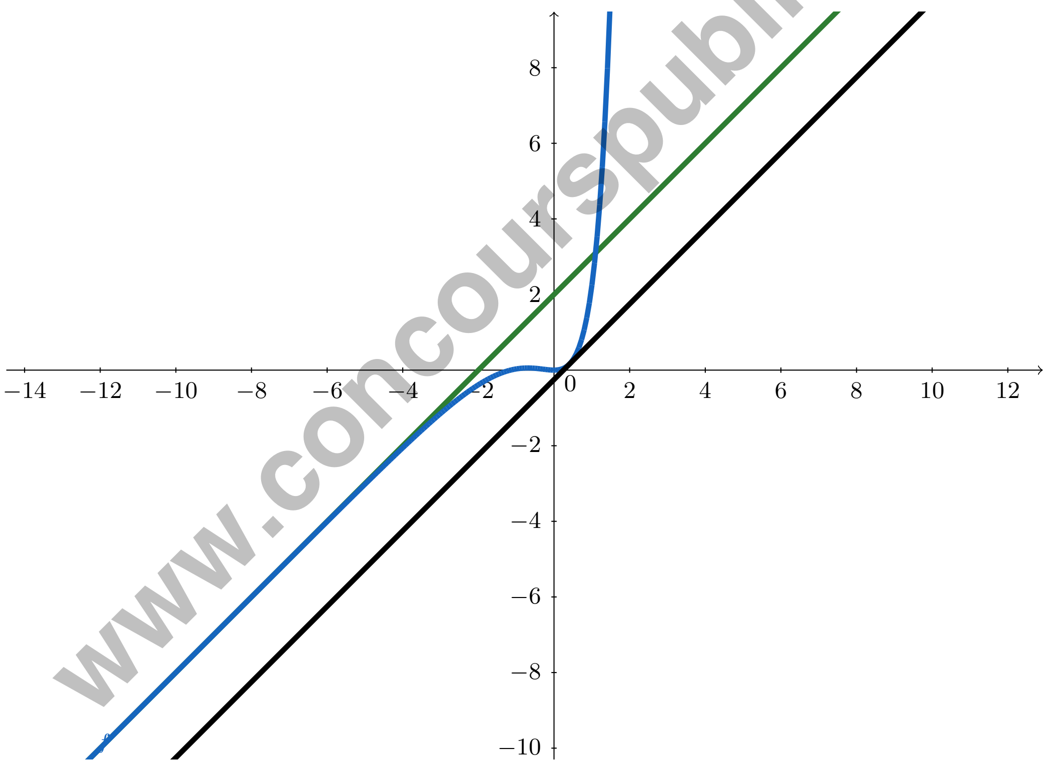
   On obtient $p = 1$. Ensuite, la tangente passe par le point $A = \begin{pmatrix} \ln(\frac{3}{2}) \\ f(\ln(\frac{3}{2})) \end{pmatrix}$.

   Or $f(\ln(\frac{3}{2})) = -\frac{1}{4} + \ln(\frac{3}{2})$. On en déduit finalement l'équation de la tangente T :

$$\boxed{T: \ x \to x - \frac{1}{4}}$$

   T et D sont parallèles.

   (b) Voici le tracé des trois courbes :



   (c) On cherche à calculer l'aire entre C et D sur le domaine $x \in [0, \ln(3)]$, sachant que C et D s'intersectent justement en $\ln(3)$. On exprime cette aire sous la forme d'une intégrale :

$$\alpha = \int_0^{\ln(3)} d(x) - f(x)\mathrm{d}x$$

On calcule alors sa valeur :

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_0^{\ln(3)} d(x) - f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln(3)} 3e^x - e^{2x}\mathrm{d}x \\ &= [3e^x - \frac{e^{2x}}{2}]_0^{\ln(3)} \\ &= 6 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

Puisque l'unité graphique est de 4 cm^2, On peut alors calculer l'aire :

$$\boxed{\alpha = 160\text{cm}^2}$$