MATHÉMATIQUES

Code-matière 030

Les candidats sont autorisés à utiliser les matériels et documents suivants :

- calculatrices électroniques, y compris programmables et alphanumériques à fonctionnement autonome sans imprimante, à entrée unique par clavier ;

- règles à calcul ;

- tables de logarithmes ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

Les quatre exercices sont à traiter. Ils sont indépendants

Exercice 1

On notera $x \wedge y$ le PGCD des entiers x et y.

On considère l'ensemble E des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$.

1) **a)** Montrer que pour tout couple (a,b) d'entiers naturels non nuls tels que $a > b$, le triplet $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ appartient à l'ensemble E.

b) Donner six solutions disctinctes.

2) Soit (x, y, z) un élément de E tel que $x \wedge y = 1$.

a) Montrer que $x \wedge z = 1$ et $y \wedge z = 1$.

b) Montrer que x et y ne sont pas de même parité.

c) On suppose, par exemple, que x est impair et y pair.

Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q, premiers entre eux tels que :

$$x = p - q \text{ , } z = p + q \text{ et } y^2 = 4pq$$

Montrer que p et q sont des carrés parfaits (carré d'un entier).

3) En déduire l'ensemble E.

Donner tous les triplets (x, y, z) de E avec $z \leq 18$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que f est paire.

3) Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ e^{-4x^2} \leq f(x) \leq e^{-x^2}$.

4) En déduire $\lim_{x\to 0^+} f(x)\ et\ \lim_{x\to +\infty} f(x)$

5) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que :

$$\forall\, x\ \in\ \mathbb{R}^*, x\, f'(x) +\ f(x) =\ 2e^{-4x^2} -\ e^{-x^2}$$

6) À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

7) Montrer que la fonction g, obtenue par prolongement par continuité de f en $x=0$, est dérivable en $x=0$. Donner la valeur de $(g)'(0)$.

<u>Exercice 3</u>

Soient $(O,\vec{U},\vec{V})$ un repère orthonormé du plan P, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs unitaires. On appelle θ l'angle (géométrique) de ces deux vecteurs. On considère le point R de coordonnées (p, q) dans ce repère, avec $p \neq 0\ et\ q\ \neq 0$.

1) **a)** Quelle condition doit vérifier θ pour que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ constitue un repère du plan P ?

On supposera dans le reste de l'exercice que cette condition est vérifiée.

b) On pose $\vec{V} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ et $\vec{V}' = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$. Calculer $\vec{V}.\vec{V}'$ et $\left\|\vec{V}\right\|$.

2) On considère le point R de coordonnées (p, q) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec p $\neq$ 0 et q $\neq$ 0. On notera (Ox) [respectivement (Oy)] la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{\imath}$ (respectivement $\vec{\jmath}$).

a) Déterminer un point P sur (Ox) et un point Q sur (Oy) tels que $OPRQ$ soit un parallélogramme.

b) Ecrire une équation de la droite *(PQ)* dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Soient *(D)* la droite passant par *O* et perpendiculaire à *(PQ)* et *H* l'intersection des droites *(D)* et *(PQ)*.

a) Ecrire une équation de la droite *(D)* dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Vérifier que :

$$\forall\ (p,q) \neq (0,0), p^2 +\ q^2 - 2\,pq\ \cos\theta > 0.$$

c) Calculer les coordonnées du point *H* dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

d) En déduire la distance du point *O* à la droite *(PQ)* en fonction de p, q et θ.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M(t)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t & 0 \\ t & 1+t & 0 \\ t & -t & 2t+1 \end{pmatrix}$$

E désigne l'ensemble des matrices $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

On pose $M \ = M(1)$.

1) E est-il un espace vectoriel ?

2) Calculer le produit $M(t) \times M(s)$. En déduire que E est stable par le produit matriciel.

3) Existe-t-il des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = M$?

4) Montrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels $(u_n)_n$ telle que $M^n = M(u_n)$.

En déduire l'expression de M^n.